§13 Universelle C^*-Algebren und Gruppenalgebren

In diesem Abschnitt wollen wir einige Beispiele für interessante konkrete C^*-Algebren betrachten. Tatsächlich gibt es viele Objekte, denen man auf natürliche Weise C^*-Algebren zuordnen kann, z.B.

- (C^*)-dynamische Systeme
- Gruppen und Halbgruppen
- Gruppoiden
- Ringe, etc.

Viele Konstruktionen sind universelle Daten, dh. universelle Algebren von Erzeugern und Relationen:

13.1 (Universelle C^*-Algebren) Sei X eine Menge und R ein System von Relationen auf X, "die in der Sprache der C^*-Algebren" gegeben sind.

Bsp: (a) $X = \{u, v\}$ $R = \left\{ \begin{matrix} u^*u = 1 - uu^* \\ vv = vu \end{matrix} \right\}$

(b) $X = \{x\}$, $R = \{x^* = x\}$

Ist dann B eine C^*-Algebra, so heißt eine Abb. $\varphi: X \to B$ eine Darstellung von (X, R) in B, falls φ alle Relationen in R erhält.

Eine C^*-Algebra A heißt universell für (X, R), falls gelten:

(1) $\exists$ Darstellung $i_X: (X, R) \to A$ von (X, R) mit $A = C^*(i_X(X))$ (dh. es ex. keine echte C^*-Unteralg. von A, die $i_X(X)$ enthält).

(2) Ist $\varphi : X \to B$ eine beliebige Darstellung von (X,R) in eine C^* Algebra B, so ex. genau ein $*$-Homom. $\tilde{\varphi} : A \to B$ mit $\tilde{\varphi}(i_X(x)) = \varphi(x) \; \forall x \in X$

Wir schreiben dann $A = C^*(X,R)$.

<u>13.2</u> Bemerkung (a) Die universelle C^*Alg. $A = C^*(X,R)$ ist, wenn sie existiert, bis auf $*$-Isomorphie eindeutig durch (X,R) bestimmt.
<u>Denn</u>: Sind (A, i_X) und $(\tilde{A}, j_X)$ universell für (X,R), so ex. nach (2) $*$-Homomorphismen $\tilde{i}_X : \tilde{A} \to A$ und $\tilde{j}_X : A \to \tilde{A}$ und
$\tilde{i}_X \circ \tilde{j}_X(i_X(x)) = \tilde{i}_X(j_X(x)) = i_X(x) = id_A(i_X(x))$
für alle $x \in X$. Aus der Eindeutigkeit in (2) folgt $\tilde{i}_X \circ \tilde{j}_X = id_A$ und analog $\tilde{j}_X \circ \tilde{i}_X = id_{\tilde{A}}$.
(b) Aus der Def. von $C^*(X,R)$ folgt für jede $*$-Algebra B eine 1-1 Bez. zwischen:
(1) nicht entarteten Darst. $\varphi : X \to B$ von (X,R), und
(2) ~~nicht~~ nicht-entart. $*$-Homom. $\phi : A \to B$.
Ist φ wie in (1), so ist $\phi = \tilde{\varphi}$ wie in (2), und ist ϕ wie in (2), so ist $\varphi = \phi \circ i_X : X \to B$ wie in (1).

Universelle C^*-Algebren muss es nicht für alle Paare (X,R) geben:

<u>13.3</u> <u>Bsp</u> (a) Sei $X = \{x\}$ mit $R = \{x = x^*\}$.
Ist dann B eine bel. C^*-Algebra und ist $b \in B$ mit $b = b^*$, so ist $\varphi : \{x\} \to B$, $\varphi(x) = b$

ein Darst. von (X,R).

Dann: Wäre $A = C^*(X,R)$ universell für (X,R) und $a := i_X(x) \in A$, so ex. für alle $b \in B$ mit $b = b^*$ ein $*$-Homom. $\tilde{\varphi}: A \to B$ mit $\tilde{\varphi}(a) = b$. Dann folgt $\|b\| = \|\tilde{\varphi}(a)\| \leq \|a\|$ für alle $b = b^* \in B$. Es folgt $\|a\| = \infty$?

(b) Setzen wir aber $X = \{x\}$, $R = \{x^* = x, \|x\| \leq 1\}$, so gilt $C^*(\{x\},R) = C_0([-1,1]\setminus\{0\}) = \{f \in C[-1,1] \mid f(0)=0\}$ mit $i_X(x) = id_{[-1,1]} \in C_0([-1,1]\setminus\{0\})$.

Denn: Nach Stone-Weierstraß gilt $C^*(id_{[-1,1]}) = C_0([-1,1]\setminus\{0\})$ und ist B eine bel. C^*-Algebra und $b \in B$ mit $b = b^*$, $\|b\| \leq 1$, so gilt $\sigma(b) \subseteq [-1,1]$ und mit F.st. Kalkül ex. dann genau ein $*$-Homom.

$$\tilde{\varphi}: C_0([-1,1]\setminus\{0\}) \to B \; ; \; \tilde{\varphi}(f) = f(b).$$

Wir wollen nun ein nützliches Kriterium zur Existenz von $C^*(X,R)$ beweisen. Dazu wollen wir uns im Folgenden auf Relationen der Form

$$\|p(x_1,\dots,x_n)\| \leq \eta \quad , \; x_1,\dots,x_n \in X \cup X^*$$

mit $\eta \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ und p ein Polynom in n nichtkommut. Variablen (ist z.B. $n=2$ und sind z_1, z_2 Variablen, so sind die Monome $z_1 z_2$ und $z_2 z_1$ verschieden!).

Bsp: Die Relation $uu^* = u^*u = 1$ lässt sich umschreiben in $\|1 - u^*u\| \leq 0$, $\|1 - uu^*\| \leq 0$.

13.4 Satz Sei $\emptyset \neq X$ eine Menge und R ein System von Relationen vom Typ $(*)$ wie oben, so dass aus R folgt: $\forall x \in X \; \exists c_x \geq 0$, so dass für jede Darst. $\varphi: X \to B$ von (X, R) folgt:

$$\|\varphi(x)\| \leq c_x.$$

Ferner existiere mind. eine Darstellung $\varphi: X \to B$ von (X, R) mit $\varphi(X) \neq \{0\}$. Dann ex. $C^*(X, R)$ und $C^*(X, R) \neq \{0\}$.

Bew: Sei $\mathcal{A} := LH\{x_1 \cdots x_n \mid n \in \mathbb{N}, x_1, \ldots, x_n \in X \cup X^*\}$. Dann ist $\mathcal{A}$ eine $*$-Algebra mit Involution und Mult. def. durch

$$(x_1 \cdots x_n)^* = x_n^* \cdots x_1^* \in \mathcal{A}$$

$$(x_1 \cdots x_n)(y_1 \cdots y_m) = x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_m \in \mathcal{A},$$

und konjugiert bzw. bilineare Fortsetzung dieser Operationen auf $\mathcal{A}$. Sei nun $\varphi: X \to B$ eine bel. Darstellung von (X, R). Dann wird durch

$$\tilde{\varphi}: \mathcal{A} \to B, \quad \tilde{\varphi}\Big(\sum_{j=1}^m \lambda_j x_1^{(j)} \cdots x_{n_j}^{(j)}\Big) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi(x_1^{(j)}) \cdots \varphi(x_{n_j}^{(j)})$$

eine $*$-Darst. von $\mathcal{A}$ definiert. Für alle $z = \sum_{j=1}^m \lambda_j x_1^{(j)} \cdots x_{n_j}^{(j)} \in \mathcal{A}$ setze dann

$$\|z\|_{C^*} := \sup_\varphi \|\tilde{\varphi}(z)\| = \sup_\varphi \Big\| \sum_{j=1}^m \lambda_j \varphi(x_1^{(j)}) \cdots \varphi(x_{n_j}^{(j)}) \Big\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^m |\lambda_j| \, c_{x_1^{(j)}} \cdots c_{x_{n_j}^{(j)}} < \infty.$$

wobei φ alle möglichen Darst. von (X, R) durchläuft. Dann ist $\|\cdot\|_{C^*}$ eine Halbnorm auf $\mathcal{A}$ und ist

$$\mathcal{N} := \{z \in \mathcal{A} \mid \|z\|_{C^*} = 0\},$$

so induziert $\|\cdot\|_{C^*}$ eine Norm auf $\mathcal{A}/\mathcal{N}$.
Da für jede Darst. $\varphi : (X,R) \to B$ gilt:

$$\|\tilde{\varphi}(z^*z)\| = \|\tilde{\varphi}(z^*)\tilde{\varphi}(z)\| = \|\tilde{\varphi}(z)\|^2 \quad (\text{da } B\ C^*\text{Alg}).$$

gilt auch $\|z^*z\|_{C^*} = \|z\|_{C^*}^2 \ \forall z \in \mathcal{A}$, und damit ist

$$A = \overline{(\mathcal{A}/\mathcal{N})}^{\|\cdot\|_{C^*}}$$

eine C^* Algebra, und wir erhalten eine Abb. $i_X : X \to A$ durch die Komposition

$$X \hookrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{q} \mathcal{A}/\mathcal{N} \subseteq A.$$

<u>Beh</u> (A, i_X) ist universell für (X,R).
Nach Konstr. ist klar, dass $A = C^*(i_X(X))$.
Ist $\varphi : X \to B$ eine bel. Darst. von (X,R), so induziert φ wie oben eine $*$-Darst.
$\tilde{\varphi} : \mathcal{A} \to B$ und nach Def. von $\|\cdot\|_{C^*}$ gilt $\mathcal{N} \subseteq \operatorname{Ker} \tilde{\varphi}$ und $\|\tilde{\varphi}(z)\| \leq \|z\|_{C^*}$ für alle $z \in \mathcal{A}$.
Damit ex. genau eine "Fortsetzung"

$$\tilde{\varphi} : A = \overline{\mathcal{A}/\mathcal{N}}^{\|\cdot\|_{C^*}} \to B \quad \text{mit } \tilde{\varphi} \circ i_X = \varphi.$$

Es bleibt zu zeigen, dass $i_X : X \to A$ eine Darst. von (X,R) ist. Sei dazu

$$\|p(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \eta$$

eine bel. Relation in R mit $\eta \geq 0$. Dann ist $z = p(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{A}$ mit

$$\|\tilde{\varphi}(z)\| = \|p(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))\| \leq \eta$$

für jede Darst. φ von (X,R), und daraus folgt auch $\|z\|_{C^*} \leq \eta$, d.h. i_X erhält R. ∎

13.5 C^*-Gruppenalgebren diskreter Gruppen

Sei G eine (diskrete) Gruppe. Ist dann
$X = \{u_g \mid g \in G\}$ ($\cong G$) mit den Relationen

$\mathcal{R} = \{u_g^* = u_{g^{-1}},\ u_g u_h = u_{gh},\ u_e = 1\}$
(mit e = neutr. Element von G), so folgt aus den Relationen, dass

$$u_g^* u_g = u_{g^{-1}} u_g = u_e = 1 = u_g u_g^*,$$

d.h. dass u_g unitär $\forall g \in G$ und $g \mapsto u_g$ ein Homomorphismus ist. Die Darstellungen
$\varphi : X = G \to B$ von $(X, \mathcal{R})$ sind also genau die Homom. $\varphi : G \to \mathcal{U}(B)$ von G in die Gruppe $\mathcal{U}(B)$ der unitären Elemente von B. Insb. folgt $\|\varphi(g)\| = 1 \ \forall g \in G$ ($= X$).
Die Relationen in $\mathcal{R}$ lassen sich leicht in Relationen vom Typ (*) umschreiben!
Damit ex. $C^*(G) := C^*(X, \mathcal{R})$.

<u>Alternative (direkte) Konstruktion:</u>
Sei $C_c(G) = \{f : G \to \mathbb{C} \mid \text{supp}(f) \text{ endl}\}$,
und sei $\mathbb{C}[G] := \{\sum_g f(g) u_g \mid f \in C_c(G)\}$
die algebraische <u>Gruppenring</u> von G.
Die Relationen in $\mathcal{R}$ liefern für $f_1, f_2 \in C_c(G)$:

$$\Big(\sum_g f_1(g) u_g\Big)\Big(\sum_g f_2(g) u_g\Big) = \sum_{l,h} f_1(l) f_2(h)\, u_{lh}$$
$$= \sum_g \Big(\sum_{lh=g} f_1(l) f_2(h)\Big) u_g = \sum_g (f_1 * f_2(g))\, u_g \in \mathbb{C}[G]$$

mit $f_1 * f_2(g) = \sum_{lh=g} f_1(l) f_2(h) = \sum_{l \in G} f_1(l) f_2(l^{-1}g)$

und ebenso $\Big(\sum_g f(g) u_g\Big)^* = \sum_g f^*(g) u_g$ mit $f^*(g) = \overline{f(g^{-1})}$.

Damit ist $\mathbb{C}[G]$ eine $*$-Algebra und analoge Rechnungen zeigen, dass für jede unitäre Darst. $\varphi: G \to \mathcal{U}(B)$ eine $*$-Darst.

$$\tilde{\varphi}: \mathbb{C}[G] \to B \;,\; \tilde{\varphi}\Big(\sum f(g) u_g\Big) = \sum_g f(g)\varphi(g)$$

von $\mathbb{C}[G]$ def wird.

Für $x = \sum_g f(g) u_g$ setze dann

$$\|x\|_{C^*} := \sup_{\varphi} \|\tilde{\varphi}(x)\| \leq \sum_g \|f(g)\| =: \|f\|_1$$

Dann ist $C^*(G) = \overline{\mathbb{C}[G]}^{\|\cdot\|_{C^*}}$ zusammen mit $i_X: G \to C^*(G)$; $i_X(g) = u_g$ universell für (X, R). Die genauen Argumente gehen ähnlich wie im Beweis von 13.4.

Beachte: Aus den Relationen in R folgt, dass jedes Monom $x_1 \cdots x_e$ mit $x_i \in X = X^* = G$ schon identisch zu einem $x \in X = G$ ist. Daher können wir jedes Element in A/N wie im Bew. von Satz 13.4 durch ein Element in $\mathbb{C}[G]$ darstellen. Im obigen Fall ist $\|\cdot\|_{C^*}$ sogar eine Norm auf $\mathbb{C}[G]$:

13.6 Lemma Sei G eine Gruppe. Dann wird durch $\lambda: G \to \mathcal{U}(\ell^2(G))$; $(\lambda_g \xi)(h) = \xi(g^{-1}h)$ eine unitäre Darstellung von G auf $\ell^2(G)$ (= unit. Darst. in $L(\ell^2(G))$) definiert und der zugehörige $*$-Homomorphismus

$$\tilde{\lambda}: \mathbb{C}[G] \to L(\ell^2(G)) \;;\; \tilde{\lambda}\Big(\sum_g f(g) u_g\Big) = \sum_g f(g)\lambda_g$$

ist injektiv.

Insbesondere folgt $\|x\|_{C^*} \geq \|\tilde{\lambda}(x)\| > 0 \;\forall\, 0 \neq x \in \mathbb{C}[G]$

Bew: Sei $0 \neq f \in C_c(G)$ und sei $h \in G$ mit $f(h) \neq 0$. Ist dann $\delta_h \in \ell^2(G)$ def. durch $\delta_h(g) = \begin{cases} 1, & g = h \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ so ist $\{\delta_h \mid h \in G\}$ eine ONB von $\ell^2(G)$ mit
$$\lambda_g \delta_h = \delta_{gh} \quad \forall g, h \in G.$$
Dann folgt $\tilde{\lambda}(\sum f(g) u_g)\delta_e = \sum_g f(g)\lambda_g \delta_e = \sum_g f(g)\delta_g \neq 0$. ∎

13.7 Def: Die universelle C^*-Gruppenalgebra $C^*(G)$ heißt auch maximale oder volle C^*-Gruppenalgebra. Die Darst. $\lambda: G \to U(\ell^2(G))$ aus 12.4 heißt (linksr-) reguläre Darstellung von G. Ist $\tilde{\lambda}: C^*(G) \to L(\ell^2(G))$ die zugeh. $*$-Darst. so heißt $C^*_r(G) := \tilde{\lambda}(C^*(G)) \subseteq L(\ell^2(G))$ reduzierte C^*-Gruppenalg. von G.

Per Konstruktion haben wir daher stets einen surjektiven $*$-Homom.
$$\tilde{\lambda}: C^*(G) \twoheadrightarrow C^*_r(G).$$
Die Gruppe G heißt mittelbar (Englisch: amenable), falls $\tilde{\lambda}: C^*(G) \to C^*_r(G)$ injektiv (also isometr. isom.) ist.

13.8 (Der Fall abelscher Gruppen). Wir wollen den Fall abelscher Gruppen genauer anschauen. In diesem Fall folgt $u_g u_h = u_{gh} = u_{hg} = u_h u_g$ für alle $g, h \in G$, und damit folgt leicht, dass $C^*(G)$ kommutativ ist.
Nach Gelfand-Naimark gilt dann, dass
$$\wedge: C^*(G) \to C(\widehat{C^*(G)}), \quad x \mapsto \hat{x}$$
ein isometr. Isomorphismus ist. Hierbei ist

$\Delta(C^*(G)) = \{\tilde{\chi} : C^*(G) \to \mathbb{C} \mid \tilde{\chi}$ ist $*$-Hom. $\tilde{\chi}(1) = 1\}$.
($C^*(G)$ ist unital mit $u_e = 1$). Wegen der universellen Eigenschaft von $C^*(G)$ gilt: Es ex. eine Bijektion zwischen
$\hat{G} := \{\chi : G \to \mathbb{T} = \mathcal{U}(\mathbb{C}) \mid \chi$ Homom$\}$ und $\widehat{C^*(G)}$
def. durch $\chi \mapsto \tilde{\chi}$, mit

$$(*)\quad \tilde{\chi}\Big(\sum_g f(g) u_g\Big) = \sum_g f(g) \chi_g =: \hat{f}(\chi) \quad \text{(Fouriertransf.)}$$

für $f \in C_c(G) \cong \mathbb{C}G$. Wir haben dann:

13.9. Satz Sei $\hat{G} = \{\chi : G \to \mathbb{T} \mid \chi$ Homom$\}$ versehen mit der Topologie der pktw. Konvergenz.
Genauer: Wir versehen $\hat{G}$ mit der von $\prod_{g \in G} \mathbb{T}$ induzierten Topologie vermöge der Einbettung $\hat{G} \hookrightarrow \prod_{g \in G} \mathbb{T}$; $\chi \mapsto (\chi(g))_{g \in G}$.
Dann gelten:
(1) $\hat{G}$ ist eine kompakte T_2-topologische Gruppe mit Mult. $(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$
(2) Die Abb $\hat{G} \to \widehat{C^*(G)}$; $\chi \to \tilde{\chi}$
ist ein Homöomorphismus.
(3) Die Fouriertransf. $\mathcal{F} : C_c(G) \to C(\hat{G})$; $f \mapsto \hat{f}$ wie in $(*)$ setzt sich fort zu einem isometr. $*$-Isomorphismus $\mathcal{F} : C^*(G) \to C(\hat{G})$ (wenn wir $C_c(G)$ mit $\mathbb{C}G \subseteq C^*(G)$ identifizieren).

Bew.: (1) Ist $(\chi_i)_i$ ein Netz in $\hat{G}$ mit $\chi_i \to \chi \in \prod_g \mathbb{T}$, so folgt für alle $g, h \in G$ und für $e \in G$:
$\chi(g)\chi(h) = \lim_i \chi_i(g)\chi_i(h) = \lim_i \chi_i(gh) = \chi(gh)$
und $\chi(e) = \lim_i \chi_i(e) = 1$. Damit ist $\chi \in \hat{G}$ und

$\hat{G}$ ist abg. in $\prod_g \mathbb{T}$. Nach Tychonow ist $\prod_g \mathbb{T}$ kompakt.

(2) Da $\hat{G}$ kompakt und $\widehat{C^*(G)}$ T_2-Raum, genügt es zu zeigen, dass $\chi \to \tilde{\chi}$ stetig ist.

Sei dazu $(\chi_i)_i$ Netz in $\hat{G}$ mit $\chi_i \to \chi$ in $\hat{G}$.

Ist dann $f \in C_c(G)$, so folgt für $x = \sum f(g) u_g \in C^*(G)$

$$\tilde{\chi}_i(x) = \sum_g f(g)\chi_i(g) \underset{\uparrow}{\longrightarrow} \sum_g f(g)\chi(g) = \tilde{\chi}(x).$$

endl. Summe

Da $\mathbb{C}G$ dicht in $C^*(G)$ und $\|\tilde{\chi}_i\|, \|\tilde{\chi}\| = 1$ folgt mit $\varepsilon/3$-Argument auch $\tilde{\chi}_i(x) \to \tilde{\chi}(x)$ $\forall x \in C^*(G)$, also $\tilde{\chi}_i \to \tilde{\chi}$ in $\widehat{C^*(G)}$.

(3) Identifizieren wir $\hat{G}$ mit $\widehat{C^*(G)}$ wie in (2), so folgt mit Gelfand-Naimark, dass

$$\wedge : C^*(G) \to C(\widehat{C^*(G)}) \cong C(\hat{G}), \; x \mapsto \hat{x} \quad (**)$$

mit $\hat{x}(\tilde{\chi}) = \tilde{\chi}(x)$ ein isometr. $*$-Hom. ist.

Für $x = \sum_g f(g) u_g$ gilt aber

$$\hat{x}(\tilde{\chi}) = \tilde{\chi}(x) \overset{(*)}{=} \hat{f}(\chi) = \mathcal{F}(f),$$ also ist $(**)$ eine Fortsetzung der Fouriertransf. $f \to \hat{f}$. ∎

<u>13.10. Definition</u> Ist G eine abelsche Gruppe, so heißt $\hat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{T})$ die <u>duale Gruppe</u> (oder das Pontrjagin-Dual) von G.

<u>Bemerkung</u>: Die duale Gruppe $\hat{G}$ kann man für <u>jede</u> <u>lokalkompakte</u> abelsche Gruppe G def. durch

$$\hat{G} = \{\chi : G \to \mathbb{T} \mid \chi \text{ } \underline{\text{stetiger}} \text{ Homom.}\}$$

versehen mit der Top. der glm. Konvergenz auf kompakten Mengen. In unserem Fall ist

G eine diskrete abelsche Gruppe. Der Satz über die Pontrjagin-Dualität sagt dann, dass $\hat{\hat{G}} \cong G$ vermöge $g \to \hat{g}$; $\hat{g}(\chi) = \chi(g)$ ist.
Wir haben gesehen:
Ist G diskret, so ist $\hat{G}$ kompakt. Umgekehrt gilt G kompakt, so $\hat{G}$ diskret.

13.11 Bsp. Ist $G = \mathbb{Z}^n$, so ist ein Homom. $\chi: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{T}$ eindeutig durch die Werte $\chi(e_i)$, $i = 1, \dots, n$, festgelegt mit e_i = iter Einheitsvektor. Ist also $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{T}^n$, so erhalten wir eine bijektive Abb. $\mathbb{T}^n \xrightarrow{\cong} \widehat{\mathbb{Z}^n}$; $z \mapsto \chi_z$ mit $\chi_z(m) = z^m$
mit $z^m := z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n}$
Umgekehrt folgt mit Pontrjagin, dass $\mathbb{Z}^n \cong \widehat{\mathbb{T}^n}$ vermöge $m \mapsto e_m$, mit $e_m(z) = z^m$ gilt.

Versehen wir $\mathbb{T}^n$ mit dem Lebesgue-Integral
$$\int_{\mathbb{T}} f(z)\,dz = \int_{[0,1]^n} f(e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n})\, d\lambda_n(t_1, \dots, t_n)$$
so bilden die Fkt. $\{e_m \mid m \in \mathbb{Z}^n\}$ eine ONB von $L^2(\mathbb{T}^n)$. Damit erhalten wir einen isometr. Isomorphismus
$$\phi: \ell^2(\mathbb{Z}^n) \to L^2(\mathbb{T}^n); \quad \phi(\xi) = \sum_m \xi(m) e_m$$
(Fourierentwicklung bzgl. d. ONB). Ferner erhalten wir eine isometr. *-Darstellung
$$M: C(\mathbb{T}^n) \to L(L^2(\mathbb{T}^n)); \quad M(f)\xi := f \cdot \xi$$
durch Multiplikationsoperatoren. Es gilt dann:

13.12 Satz Sei $\tilde{\lambda} : C^*(\mathbb{Z}^n) \to C^*_r(\mathbb{Z}^n) \subseteq L(\ell^2(\mathbb{Z}^n))$ die reguläre Darst. von $\mathbb{Z}^n$. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ

$$\begin{array}{ccc} C^*(\mathbb{Z}^n) & \xrightarrow{\tilde{\lambda}} & C^*_r(\mathbb{Z}^n) \subseteq L(\ell^2(\mathbb{Z}^n)) \\ \mathcal{F}\downarrow & & \downarrow \mathrm{Ad}\,\phi \quad [\mathrm{Ad}\,\phi(T) = \phi\circ T\circ\phi^{-1}] \\ C(\mathbb{T}^n) & \xrightarrow{M} & L(L^2(\mathbb{T}^n)) \end{array}$$

Insbesondere folgt, dass $\tilde{\lambda} : C^*(\mathbb{Z}^n) \to C^*_r(\mathbb{Z}^n)$ ein isometr. Isom. ist (dh. $\mathbb{Z}^n$ ist mittelbar).

Bemerkung: Einen ähnlichen Satz kann man für jede abelsche Gruppe beweisen! (s.u.)

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass $\forall f \in C_c(\mathbb{Z}^n), \xi \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$ gilt: $(M\circ\mathcal{F}(f))\phi(\xi) \overset{(*)}{=} \phi(\tilde{\lambda}(f)\xi)$. Dies folgt, wenn wir für alle δ_m aus d. ONB $\{\delta_m \mid m \in \mathbb{Z}^n\}$ die Gleichung $(*)$ zeigen können. Wegen $\phi(\delta_m) = e_m$ gilt:

$$\big((M\circ \underbrace{\mathcal{F}(f)}_{=\hat{f}})\phi(\delta_m)\big)(z) = (M(\hat{f})e_m)(z) = \hat{f}(z)z^m$$

$$= \Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)z^k\Big)z^m = \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(k)z^{k+m} = \phi\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\delta_{k+m}\Big)(z)$$

$$= \phi\Big(\Big(\sum_k f(k)\lambda_k\Big)\delta_m\Big)(z) = \phi\big(\tilde{\lambda}(f)\delta_m\big)(z). \qquad \blacksquare$$

13.13 Beobachtung: Das Lebesgue-Integral auf $\mathbb{T}^n$ kann auf $C^*(\mathbb{Z}^n) \cong C(\mathbb{T}^n)$ wie folgt beschrieben werden: Ist $f \in C^*(\mathbb{Z}^n)$, so gilt

$$\int_{\mathbb{T}^n} \hat{f}(z)\,dz = \langle \tilde{\lambda}(f)\delta_0, \delta_0\rangle, \quad \delta_0 = \text{Dirac-Fkt in } 0 \in \mathbb{Z}^n$$

Denn: Nach 12.10 gilt: $\int_{\mathbb{T}^n} \hat{f}(z)dz = \langle M(\hat{f})1_{\mathbb{T}^n}, 1_{\mathbb{T}^n}\rangle_{L^2(\mathbb{T}^n)}$

$$= \langle M(\hat{f})\phi(\delta_0), \phi(\delta_0)\rangle_{L^2} = \langle \phi^{-1}\circ M(\hat{f})\circ\phi(\delta_0), \delta_0\rangle \overset{12.10}{=} \langle\tilde{\lambda}(f)\delta_0, \delta_0\rangle_{\ell^2}$$

Dies kann man verallgemeinern! Ist G eine diskrete abelsche Gruppe, so wird durch

$$\int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)\,d\chi := \langle \tilde{\lambda}(f)\delta_e, \delta_e\rangle \quad , \quad f \in C_c(G)$$

ein Translationsinvariantes Integral auf $\hat{G}$ (das sogenannte Haarintegral auf $\hat{G}$) definiert, so dass für dieses Integral alle oben für $\mathbb{Z}^n$ erzielten Resultate entsprechende Verallgemeinerungen besitzen. Insbesondere haben wir einen Plancherel-Isomorphismus

$$\phi : \ell^2(G) \to L^2(\hat{G}) \; ; \; \phi(\delta_g) = e_g \text{ mit } e_g(\chi) = \chi(g)$$

und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} C^*(G) & \xrightarrow{\tilde{\lambda}} & C_r^*(G) \subseteq L(\ell^2(G)) \\ \mathcal{F}\big\downarrow & & \big\downarrow \mathrm{Ad}\,\phi \\ C(\hat{G}) & \xrightarrow{M} & L(L^2(\hat{G})) \end{array}$$

kommutiert. Insb. ist $C^*(G) \xrightarrow{\tilde{\lambda}} C_r^*(G)$ injektiv und G ist mittelbar.

<u>Allgemeiner</u>: Ist G eine <u>beliebige</u> diskrete Gruppe, so wird durch $\tau : C^*(G) \to \mathbb{C}$; $\tau(x) := \langle \tilde{\lambda}(x)\delta_e, \delta_e\rangle$ ein "Maß" auf der nichtkommutativen Algebra $C^*(G)$ definiert, welches das Haarmaß auf $\hat{G}$ (bzw. das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{T}^n$) verallgemeinert.

<u>Beachte</u>: τ ist eine <u>normierte Spur</u>, d.h. τ ist ein Zustand (= normiert) und

$$\tau(xy) = \tau(yx) \quad \forall x, y \in C^*(G) \quad \text{(Spureigensch.)}$$

Denn für $f \in C_c(G)$ gilt $\tau(f) = \langle \tilde{\lambda}(f)\delta_e, \delta_e\rangle = \sum_g f(g) \langle \lambda_g \delta_e, \delta_e\rangle$ $= \sum_g f(g) \langle \delta_g, \delta_e\rangle = f(e)$ und für $f_1, f_2 \in C_c(G)$ gilt

$$f_1 * f_2(e) = \sum_g f_1(g) f_2(g^{-1}) \overset{g \to g^{-1}}{=} \sum_g f_2(g) f_1(g^{-1}) = f_2 * f_1(e),$$

also gilt $\tau(f_1 * f_2) = f_1 * f_2(e) = f_2 * f_1(e) = \tau(f_2 * f_1)$ für alle $f_1, f_2 \in C_c(G)$, und da $C_c(G) \cong \mathbb{C}[G]$ dicht in $C^*(G)$ folgt auch

$$\tau(xy) = \tau(yx) \quad \forall\, x, y \in C^*(G).$$

Wir werden später noch mehr mit solchen Spurzuständen zu tun haben!

13.13 Verschränkte Produkte

Sei G eine diskrete Gruppe und sei A eine unitale C^*-Algebra. Eine Wirkung von G auf A ist ein Homom.

$$\alpha: G \to \mathrm{Aut}(A), \; g \mapsto \alpha_g$$

mit $\mathrm{Aut}(A) := \{\alpha: A \to A \mid \alpha \text{ } *\text{-Autom.}\}$.

Sei $X = A \cup \{u_g \mid g \in G\}$ $(\cong A \cup G)$.

mit Relationen

$$R = \{\text{"Relationen von } A\text{"}, \text{"Relationen von } G\text{"}, u_g^* = u_{g^{-1}}, u_e = 1, u_g a u_{g^{-1}} = \alpha_g(a) \; \forall a \in A, g \in G\}$$

Dann heißt $A \rtimes_\alpha G := C^*(X, R)$ das volle (= maximal = universelle) verschränkte Produkt von (A, G, α). Die Darstellungen von (X, R) sind dann genau die kovarianten Darstellungen: Paare (π, v) mit

$\pi: A \to B$ $*$-Homom., $v: G \to \mathcal{U}(B)$ Homom.

mit $v_g \pi(a) v_{g^{-1}} = \pi(\alpha_g(a)) \; \forall a \in A, g \in G$.

Wie bei Gruppenalgebren, kann man $A \rtimes_\alpha G$ als Vervollst. von $C_c(G, A) \cong A[G]$ (vermöge $f \mapsto \sum_g f(g) u_g$) konstruieren. Ist dann

$(\pi, v): (A, G) \to B$ eine kov. Darst. von (A, G, α), so ist die zugeh. $*$-Darst. von $A \rtimes_\alpha G$ auf $C_c(G, A) = A[G]$ gg. durch

$$\pi \times v(f) := \sum_g \pi(f(g))\, v_g \in B.$$

13.14 Es gibt viele weitere wichtige C^*-Algebren, die als univ. C^*-Algebren definiert sind:

a) Die Toeplitz-Algebra

$$\mathcal{T} = C^*(S) \quad \text{mit} \quad S^*S = 1$$

(also $X = \{S\}$, $R = \{S^*S = 1\}$)

Eine Darst. d. Relation erhält man z.B. durch

$$S : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N}), \quad (Sf)(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 1, \\ f(n-1) & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für ein $S \in L(H)$ bedeutet die Relation $S^*S = 1$, dass $S : H \to H$ isometrisch (aber nicht unbedingt surjektiv!) ist, denn

$$\langle S\xi, S\eta\rangle = \langle S^*S\xi, \eta\rangle = \langle \xi, \eta\rangle \quad \forall \xi, \eta \in H.$$

Der Operator $SS^* : H \to S(H) \subseteq H$ ist dann die orthogonale Projektion auf $S(H) \subseteq H$

(b) Cuntz-Algebren:

$$\mathcal{O}_n = C^*(s_1, \dots, s_n) \text{ mit } s_i^* s_i = 1 \ \forall\, 1 \le i \le n$$
$$\text{und} \quad \sum_{i=1}^n s_i s_i^* = 1.$$

(c) Nichtkommutative Tori (siehe §14).

(d) Graph-Algebren, Cuntz-Krieger Algebren etc.